UTN **TEMA 1**
Ingeniería de sistemas ALUMNO:..
Investigación Operativa
Profesor: Mg. Ing. Ricardo D. Carlevari **Parcial: 11/06/24**

1. **(50 puntos)** La empresa DEPILLA desea establecer su plan de producción para sus tres productos A, B y C sujeto a las siguientes tres restricciones: mano de obra (720 horas – hombre por mes), materia prima (850 Kg por mes) y demanda mínima conjunta de los tres productos (140 unid/mes). Los requerimientos de mano de obra por cada unidad producida de cada producto son (2, 5, 6), respectivamente y los requerimientos de materia prima (5, 4, 3) respectivamente. Se sabe además que los beneficios unitarios de los productos son, respectivamente: \$6, \$4 y \$1.
Observación importante: respetar el orden en que han sido dadas las restricciones

Tabla Óptima

Ck	Xk	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	X_4						-2/5	
0	X_6						1/5	
6	X_1						1/5	

Se pide:

a) Armar la tabla inicial del Simplex y completar la tabla óptima sin usar el Método Simplex
b) Cuál es el beneficio mínimo que debería tener el producto B para que convenga producirlo. Justificar
c) Cuánto sería lo máximo que estaría dispuesto a pagar por un kg de materia prima adicional? Justificar
d) Qué cambios se producen en la solución hallada si la restricción de producción mínima se reduce a 130 unidades, cambia el funcional? Cambia la estructura de la solución óptima?. Justificar
e) Hallar el rango de variación del beneficio unitario de A dentro del cual no se altera la estructura de la solución óptima hallada
f) Determinar si es conveniente fabricar un nuevo producto que requiere 2 hs. de mano de obra, 5 Kg. de materia prima y participa en la restricción de demanda mínima, si su beneficio unitario es de \$8. En caso afirmativo, calcular la nueva solución.
g) Determinar si se altera la solución hallada al agregarse una restricción de combustible, según la cual, se necesitan 2, 5 y 3 litros/unidad para los productos A, B y C respectivamente y se dispone de 300 litros. En caso de modificarse, encontrar la nueva tabla óptima del dual.

2. **(40 puntos)** Una empresa de seguridad debe cubrir guardias diarias en un importante establecimiento. El personal cumple un horario de 6 horas por día en forma corrida, comenzando el primer turno a las 0 horas y los siguientes, a la hora de comienzo de la correspondiente banda horaria (a las 0, a las 3, etc.). El personal que entra a las 0 y sale a las 6hs cobra 150\$/hora, mientras que el resto del personal cobra 100\$/h. Se dispone además de dos grupos de agentes que trabajan 9 horas del siguiente modo: uno entra a las 6 y el otro a las 12. Este personal cobra 120\$/hora y se requiere que estos no excedan el 20% del total del personal. Todos los agentes son hombres con excepción de los que trabajan de 6 a 12 (entran a las 6 y salen a las 12) que son hombres y mujeres. Para ese personal se requiere que, al menos un 30% sean mujeres, las que, a su vez, cobran un 10% más que los hombres. Definir claramente las variables, hacer un gráfico y formular un modelo de P.L. que permita minimizar los costos totales. Las necesidades mínimas de personal en cada banda horaria de 3 horas son:

0-3: 9 personas	12-15: 18 personas
3-6: 7 personas	15-18: 22 personas
6-9: 12 personas	18-21: 10 personas
9-12: 15 personas	21-24: 6 personas

3. **(10 puntos)** a) Soluciones alternativas: mostrar con un ejemplo gráfico y en el Simplex, explicando claramente.
b) Polígono abierto: idem a)

Tema I.O. | Parcial Único | Fecha: 11-6-24 Tema 1

① 80p.

La empresa DEPILLA desea establecer su plan de producción para sus tres productos A, B y C sujeto a los seg. tres restricciones: mano de obra (720 HH/mes), materia prima (850kg/mes) y y demanda mínima conjunta de los tres productos (140u/mes).

Los req. de M.O por cada unidad producida de cada producto son (2, 5, 6) respectivamente y los req de MP. (5, 4, 3) resp.

Se sabe, además, que los beneficios unitarios de los productos son $6, $4 y $1, resp.

			6	4	1	0	0	0
C_R	X_R	B_R	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	X_4	380	0	3,4	4,8	1	$-2/5$	0
0	X_6	30	0	$-0,2$	$-0,4$	0	$1/5$	1
6	X_1	170	1	0,8	0,6	0	$1/5$	0
[illegible]	$z = 1020$		0	0,8	2,6	0	1,2	0
			y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3

a) Armar la tabla inicial del Simplex y completar la tabla óptima sin usar el Método Simplex

Planteo directo:

MO) $2X_1 + 5X_2 + 6X_3 \leq 720$
MP) $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 850$
dem) $X_1 + X_2 + X_3 \geqslant 140$

$$\rightarrow \begin{cases} 2X_1 + 5X_2 + 6X_3 + X_4 = 720 \\ 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_5 = 850 \\ X_1 + X_2 + X_3 - X_6 + \mu = 140 \end{cases}$$

$Z = 6X_1 + 4X_2 + X_3$ MAX

$Z = 6X_1 + 4X_2 + X_3 - M\mu$

Inicial

		c_j	6	4	1	0	0	0	$-M$
C_R	X_R	B_R	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	μ
0	X_4	720	2	5	6	1	0	0	0
0	X_5	850	5	4	3	0	1	0	0
$-M$	μ	140	1	1	1	0	0	-1	1
	$Z = -140M$		$-M-6$	$-M-4$	$-M-1$	0	0	M	0

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B_R = M \cdot \begin{pmatrix} 720 \\ 850 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 30 \\ 170 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = M \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \overset{es\ -}{\begin{pmatrix} 4,8 \\ -0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}}$$

$$A_2 = M \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,4 \\ -0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Notas:

b) ¿Cuál es el beneficio mínimo que debería tener el producto B para que convenga producirlo.

Como B lo relacionamos con x_2 y es una variable NO básica (no conviene producirlo) tiene un costo de oportunidad de $0,8

El beneficio de producir B en el funcional es $4 (coef de x_2)

Entonces, el beneficio mínimo es la suma del costo de oportunidad y el benef. del funcional

$$\boxed{CMin_{B} = \$4,8}$$

c) ¿Cuánto sería lo máximo que estaría dispuesto a pagar por un kg. de mat. prima adicional?

Es el valor marginal de MP (coef A_5) → $\boxed{Máx_{MP} = \$1,2}$

d) ¿Qué cambios se producen en la solución hallada si la restricción de producción mínima se reduce a 130 unidades? ¿Cambia el funcional? ¿Cambia la estructura de la sol. óptima?

Según la tabla óptima hay un sobrante de 30 unidades producidas (B_6). La restricción era 140, esto quiere decir que se produjeron 170 unidades. Si la restricción ahora es menor, sobrarán 40 unidades. El funcional NO cambia. La estructura de la solución óptima tampoco cambia

e) Hallar el rango de variación del beneficio unitario de A dentro del cual no se altera la estructura de la sol. óptima hallada.

Mm
s − +
i + −

A se relaciona con X_1 ⇒ hallo límites de C_1 ... → para C_1 sup busco θ_{ij} −
↳ variable básica

No hay → $\boxed{C_1 sup = +\infty}$

$$C_1 inf = 6 - \left[\overset{1}{\frac{0,8}{0,8}} ; \overset{13/3}{\frac{2,6}{0,6}} ; \overset{6}{\frac{1,2}{1/5}}\right] = 5$$

$$\boxed{C_1 inf = 5}$$

f) Determinar si es conveniente fabricar un nuevo producto que requiere 2hs de MO, 5kg de MP y participa en la restricción de demanda mínima, si su beneficio unitario es de $8.

En caso afirmativo, calcular la nueva solución.

$$\begin{array}{l} \text{MO)} \\ \text{MP)} \\ \text{dem)} \end{array} \begin{cases} 2X_1 + 5X_2 + 6X_3 + 2X_4 \leq 720 \\ 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 5X_4 \leq 850 \\ -X_1 - X_2 - X_3 - X_4 \leq -140 \end{cases}$$

$$\text{MAX } Z = 6X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4$$

$$2\overset{0}{y_1} + 5y_2 - \overset{0}{y_3} = \underbrace{\overset{\text{benef. mínimo}}{6} < 8}_{\text{conviene fabricarlo}}$$

$$y_1 = 0 = y_3 \quad y_2 = 1,2$$

Continuación

coef. A7

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

			6	4					8
C_R	X_R	B_R	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	X_4	380	0	3,4	4,8	1	-0,4	0	0
0	X_6	30	0	-0,2	-0,4	0	0,2	1	2
6	X_1	170	1	0,8	0,6	0	0,2	0	1
	Z = 1020		0	0,8	2,6	0	1,2	0	-2

sale X_6

entra X_7

			6	4					8
0	X_4	380	0	3,4	4,8	1	-0,4	0	0
8	X_7	15	0	-0,1	-0,2	0	0,1	0,5	1
6	X_1	155	1	0,9	0,8	0	0,1	-0,5	0
	Z = 1050		0	4,6	3,2	0	1,4	1	0

Tabla óptima con X_7

9) Determinar si se altera la solución hallada al agregarse una restricción de combustible, según la cual se necesitan 2, 5 y 3 litros por unidad para A, B y C resp. y se disponen de 300 litros.
En caso de modificarse encontrar la ~~[illegible]~~ nueva tabla óptima del dual.

MO) $2X_1 + 5X_2 + 6X_3 \leq 720$
MP) $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 850$
dem) $-X_1 - X_2 - X_3 \leq -140$
comb) $2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 300$

$Z = 6X_1 + 4X_2 + X_3$ MAX directo

S/tabla óptima: $X_1 = 170$
$X_2 = 0$
$X_3 = 0$

$2 \times 170 + 5 \times 0 + 3 \times 0 = 340 > 300$

la tabla óptima cambia

dual

MIN: $Z = 720y_1 + 850y_2 - 140y_3 + 300y_7$

Paso a dual la tabla óptima del Directo

MIN

		C_R	720	850	-140	0	0	0	300	
C_R	y_R	B_R	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6	A'_7	
0	y_5	0,8	-3,4	0	0,2	-0,8	1	0	-3,4	
0	y_6	2,6	-4,8	0	0,4	-0,6	0	1	-1,80	(unico +)
850	y_2	1,2	0,4	1	-0,2	-0,2	0	0	0,4	⇐ sale y_2
Z = 1020			-380	0	-30	-170	0	0	40	
			x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3	⇑ entra y_7	

$$A_7 \text{ inicial} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Planteo dual inicial

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 - y_3 + 2y_7 \geq 6 \\ 5y_1 + 4y_2 - y_3 + 5y_7 \geq 4 \\ 6y_1 + 3y_2 - y_3 + 3y_7 \geq 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2y_1 + 5y_2 - y_3 - y_4 + 2y_7 + \mu_1 = 6 \\ 5y_1 + 4y_2 - y_3 - y_5 + 5y_7 + \mu_2 = 4 \\ 6y_1 + 3y_2 - y_3 - y_6 + 3y_7 + \mu_3 = 1 \end{matrix}$$

$Z = 720y_1 + 850y_2 - 140y_3 + 300y_7$ MIN $Z = 720y_1 + 850y_2 - 140y_3 + 300y_7 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3$

C_R	y_R	B_R	720	850	-140	0 A_4	0 A_5	0 A_6	300	μ_1	μ_2	μ_3
M	μ_1	6	2	5	-1	-1	0	0	2	1		
M	μ_2	4	5	4	-1	0	-1	0	5		1	
M	μ_3	1	6	3	-1	0	0	-1	3			1

todos los coef son negativos

$$A'_{7_F} = M \cdot A'_{7_I} = \begin{pmatrix} 0,8 & -1 & 0 \\ 0,6 & 0 & -1 \\ 0,2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,4 \\ -1,8 \\ 0,4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0,8 & -1 & 0 \\ 0,6 & 0 & -1 \\ 0,2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0	y_5	11	0	8,5	-1,5	-2,5	1	0	0
0	y_6	8	-3	4,5	-0,5	-1,5	0	1	0
300	y_7	3	1	2,5	-0,5	-0,5	0	0	1
Z = 900			-420	-100	-10	-150	0	0	0

Tabla óptima dual con A'_7

NOTA

Tema IO Parcial único Fecha: 11-6-24 Tema 1

② Una empresa de seguridad debe cubrir guardias diarias en un importante establecimiento.
El personal cumple un horario de 6 hs por día en forma corrida, comenzando el 1° turno a las 0 hs y los sig. a la hora de comienzo de la correspondiente banda horaria (0, 3, 6 ...)

El personal que entra a las 0 y sale a las 6 hs cobra 150 $/h mientras que el resto del personal cobra 100 $/h

Se dispone, además, de dos grupos de agentes que trabajan 9 horas del sig. modo: uno entra a las 6 y otro a las 12. Este personal cobra 120 $/h y se requiere que estos no excedan el 20% del total del personal

Todos los agentes son hombres con excepción de los que trabajan de 6 a 12 (entran a las 6 salen a las 12) que son hombres y mujeres. Para este personal se requiere que, al menos un 30% sean mujeres. las que, a su vez, cobran un 10% más que los hombres.

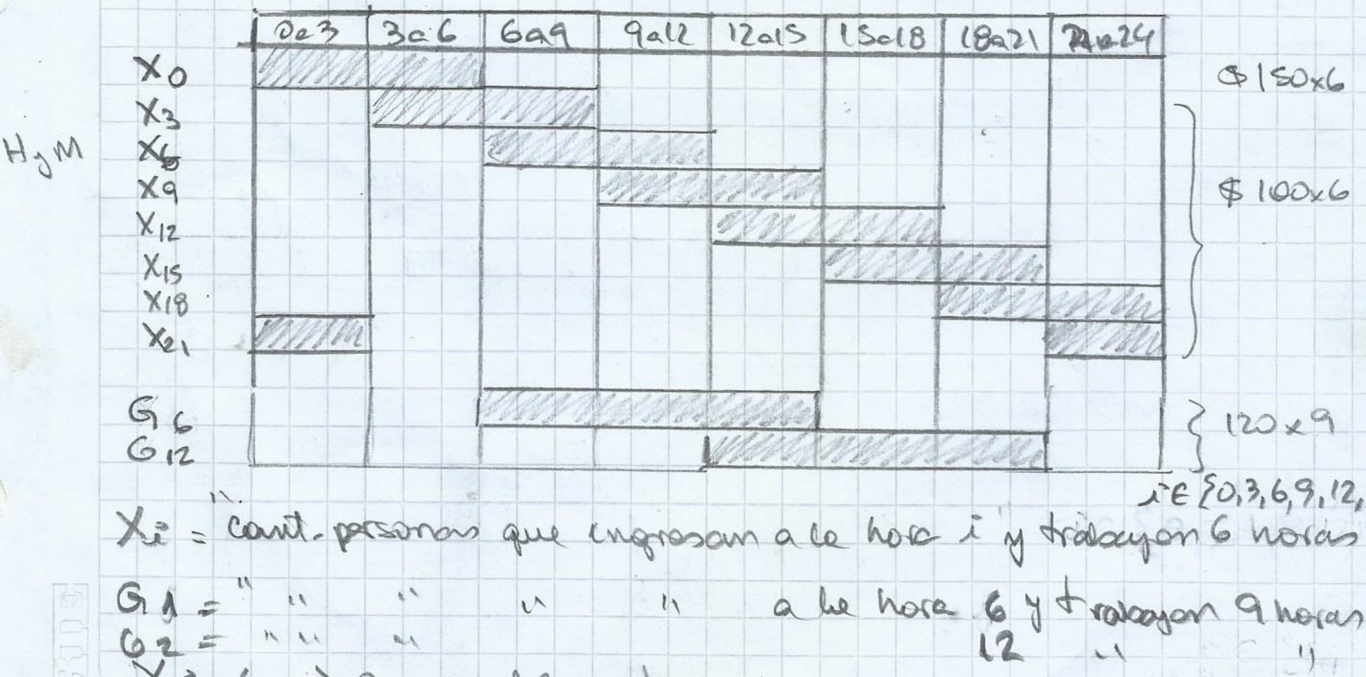
Definir las variables, hacer un gráfico y formular el modelo PL que permita minimizar los costos totales.

Las necesidades mínimas de personal en cada banda horaria de 3 horas son:

0-3 : 9 personas
3-6 : 7 "
6-9 : 12 "
9-12 : 15 "

12-15 : 18 personas
15-18 : 22
18-21 : 10
21-24 : 6

Var. ENTERAS



$i \in \{0,3,6,9,12,15,18,21\}$

X_i = "cant. personas que ingresan a la hora i y trabajan 6 horas"

G_1 = " " " " " a la hora 6 y trabajan 9 horas
G_2 = " " " " 12 " "
$X_i, G_j \geq 0$ variables enteras

IO

Parcial único

HOJA N° tema 1

FECHA 11-6-24

X_{Bi} = cant trabajadores en la banda $i-(i+3)$

X_{6M} = cant de mujeres que trabajan de 6 a 12

X_{6H} = " " hombres " " " "

X = cant total de empleados

–

$-X_{B0} + X_0 + X_{21} = 0$ $X_{B0} \geq 9$

$-X_{B3} + X_0 + X_3 = 0$ $X_{B3} \geq 7$

$-X_{B6} + X_3 + X_6 + G_6 = 0$ $X_{B6} \geq 12$

$-X_{B9} + X_6 + X_9 + G_6 = 0$ $X_{B9} \geq 15$

$-X_{B12} + X_9 + X_{12} + G_6 + G_{12} = 0$ $X_{B12} \geq 18$

$-X_{B15} + X_{12} + X_{15} + G_2 = 0$ $X_{B15} \geq 22$

$-X_{B18} + X_{15} + X_{18} + G_2 = 0$ $X_{B18} \geq 10$

$-X_{B21} + X_{18} + X_{21} = 0$ $X_{B21} \geq 6$

$-X + X_0 + X_3 + X_6 + X_{12} + X_{15} + X_{18} + X_{21} = 0$

$G_1 + G_2 - 0{,}2X \leq 0$

$X_{6M} - 0{,}3X_6 \geq 0$

$X_{6M} + X_{6H} - X_6 = 0$

(MIN)

$$Z = 900\,X_0 + 600\,(X_3 + X_{6H} + X_9 + X_{12} + X_{15} + X_{18} + X_{21}) +$$

$$+ 660\,X_{6M} + 1080\,(G_1 + G_2)$$

NOTA